SK

SKEMA BUSINESS SCHOOL

MATHEMATIQUES FINANCIERES
SESSION 2 – ANNEE ACADEMIQUE 2016/2017
SOPHIE GAY ANGER

« WARM UP »

APPLICATIONS

- Quelle est la valeur future de 725EUR placés pendant 6 ans au taux de 4.25% ? Quels sont les intérêts de l'année 3 ? Comparez les situations où 4,25% est un taux de rendement simple et où ce taux est composé.

- Vous placez 12'000EUR 2 ans à 3.5%, 4 ans à 2.75% et 5 ans à 1.95%, quelle est la valeur finale du placement ? Quel est le taux de rendement moyen réalisé ?

- Quelle est la valeur présente de 1500EUR versés dans 6 ans si le taux d'intérêt est de 2.20% ?

- Si vous exigez une rémunération de 3.2%, combien êtes vous prêt à payer aujourd'hui pour obtenir 16'000EUR dans 4 ans ?

« WARM UP »

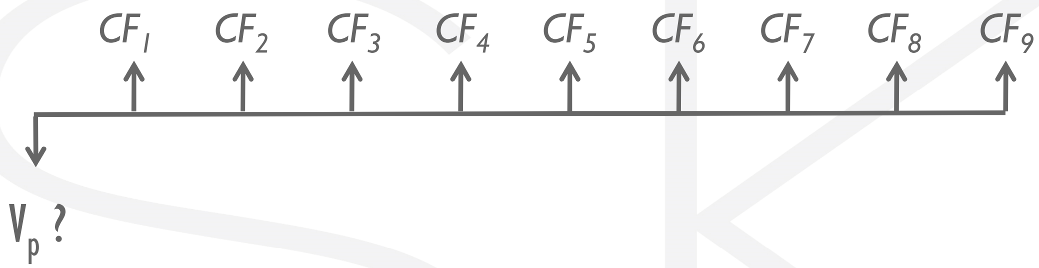
APPLICATIONS

- Un investissement vous promet une rente mensuelle tardive de 2400€ pendant 5 ans, puis une rente semestrielle tardive de 6100€ pendant 7 ans. Si le taux de rendement pertinent est de 2,9% effectif annuel, quelle est la valeur présente de cet instrument financier ?

- Vous empruntez 20'000€ aujourd'hui et rembourserez par versements tardifs semestriels pendant 10 ans. Le remboursement débutera dans 2 ans. Quel sera le montant de vos versements semestriels si le taux de rendement est de 3% proportionnel capitalisé par mois ?

SUITE DE VERSEMENTS

SUITES DE VERSEMENTS PERIODIQUES IDENTIQUES – valeur présente



$$V_P = \frac{CF_1}{(1+r)^1} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \frac{CF_3}{(1+r)^3} + \frac{CF_4}{(1+r)^4} + \frac{CF_5}{(1+r)^5} + \ldots + \frac{CF_9}{(1+r)^9}$$

$$V_P = CF\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \frac{1}{(1+r)^4} + \frac{1}{(1+r)^5} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^9}\right]$$

SUITE DE VERSEMENTS

SUITES DE VERSEMENTS PERIODIQUES IDENTIQUES – valeur présente

$$V_P = \frac{CF_1}{(1+r)^1} + \frac{CF_2}{(1+r)^2} + \frac{CF_3}{(1+r)^3} + \frac{CF_4}{(1+r)^4} + \frac{CF_5}{(1+r)^5} + \ldots + \frac{CF_9}{(1+r)^9}$$

$$V_P = CF\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + \frac{1}{(1+r)^3} + \frac{1}{(1+r)^4} + \frac{1}{(1+r)^5} + \ldots + \frac{1}{(1+r)^9}\right]$$

$$V_P = CF\left[\frac{1-(1+r)^{-9}}{r}\right]$$

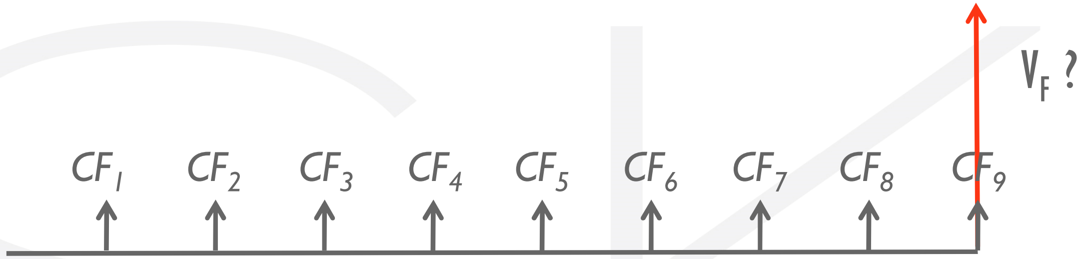
$$V_P = CF\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$$

Nombre de versements

Taux correspondant à la fréquence des paiements

SUITE DE VERSEMENTS

SUITES DE VERSEMENTS PERIODIQUES IDENTIQUES – valeur future



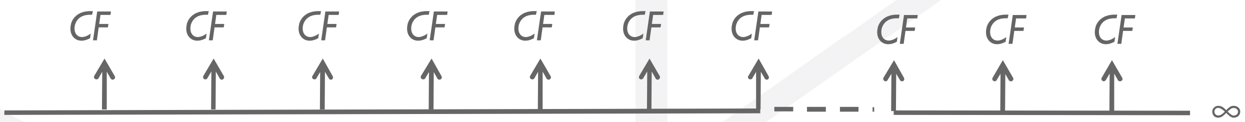
$$V_F = CF_1(1+r)^8 + CF_2(1+r)^7 + CF_3(1+r)^6 + CF_4(1+r)^5 + CF_5(1+r)^4 + \ldots + CF_9$$

$$V_F = CF\left[1 + (1+r)^1 + (1+r)^2 + (1+r)^3 + (1+r)^4 + (1+r)^5 + \ldots + (1+r)^8\right]$$

$$V_F = CF\left[\frac{(1+r)^9 - 1}{r}\right] \qquad V_F = CF\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$$

SUITE DE VERSEMENTS

SUITES DE VERSEMENTS PERIODIQUES IDENTIQUES **INFINIES**



$$\lim_{n \to \infty} V_P = CF\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right] = \frac{CF}{r}$$

SUITE DE VERSEMENTS

EXERCICES

- Vous gagnez à une loterie 2,6 millions € et l'organisateur du jeu vous propose l'alternative suivante : toucher l'intégralité de la somme gagnée immédiatement, ou recevoir une rente trimestrielle (tardive) de 25'000€ pendant 35 ans. Quelle solution choisirez-vous si vous jugez que le taux de rendement pertinent sur la période sera en moyenne de 2.25% effectif annuel ?

- Vous investissez vos économies dans un produit d'assurance au taux de 5% effectif annuel et souhaitez obtenir une rente annuelle tardive de 36'000€ pendant 20 ans. De combien devez-vous disposer pour cet investissement ?

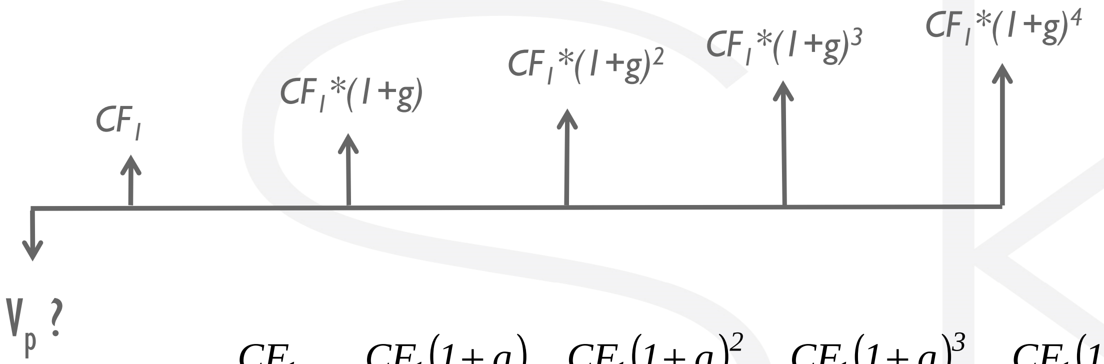
SUITE DE VERSEMENTS

EXERCICES

- Vous souhaitez partir faire un tour du monde dans 4 ans et voulez le financer par des dépôts mensuels précoces sur votre compte d'épargne. Combien devez-vous déposer chaque début de mois si vous voulez accumuler 25'000€ ? La rémunération de votre compte est de 2% annuel effectif.

SUITE DE VERSEMENTS

SUITES DE VERSEMENTS PERIODIQUES **CROISSANTS – valeur présente**



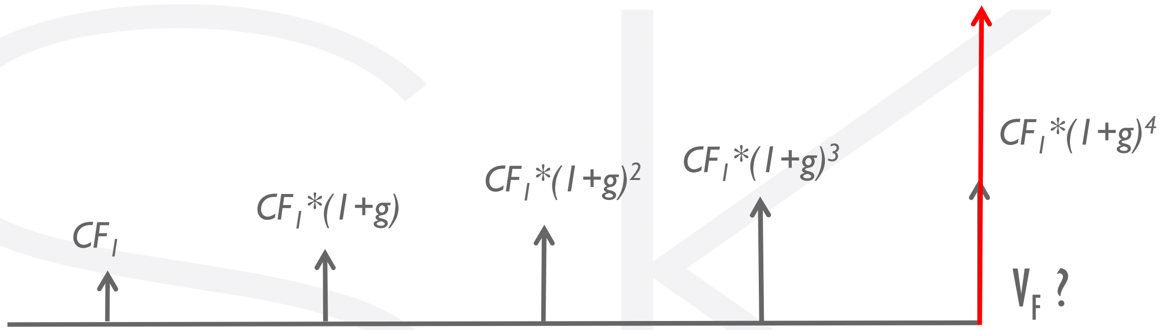
$$V_P = \frac{CF_1}{(1+r)^1} + \frac{CF_1(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{CF_1(1+g)^2}{(1+r)^3} + \frac{CF_1(1+g)^3}{(1+r)^4} + \frac{CF_1(1+g)^4}{(1+r)^5}$$

$$V_P = CF\left[\frac{1}{(1+r)^1} + \frac{(1+g)^1}{(1+r)^2} + \frac{(1+g)^2}{(1+r)^3} + \frac{(1+g)^3}{(1+r)^4} + \frac{(1+g)^4}{(1+r)^5}\right]$$

$$V_P = CF\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^5}{r-g}\right]$$

SUITE DE VERSEMENTS

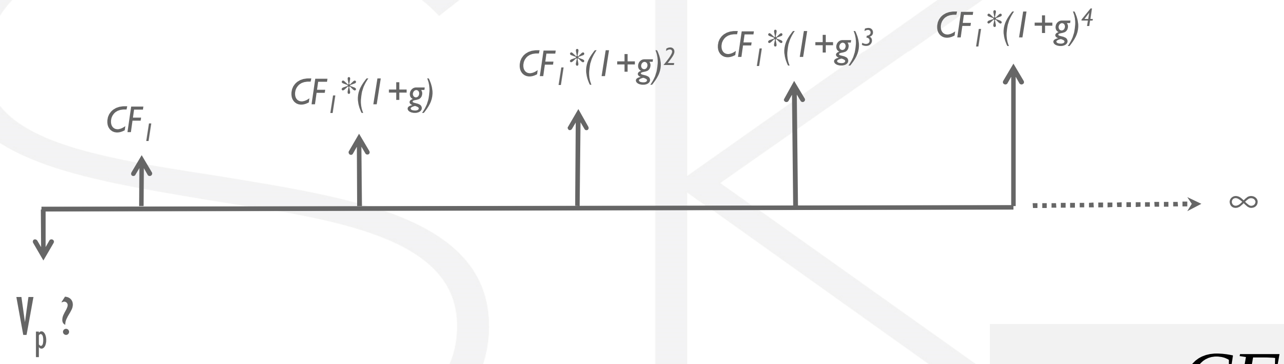
SUITES DE VERSEMENTS PERIODIQUES CROISSANTS – Valeur future



$$V_P = CF\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^5}{r-g}\right] \quad \longrightarrow \quad V_F = CF\left[\frac{1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^5}{r-g}\right](1+r)^5$$

SUITE DE VERSEMENTS

SUITES DE VERSEMENTS PERIODIQUES CROISSANTS **INFINIS**



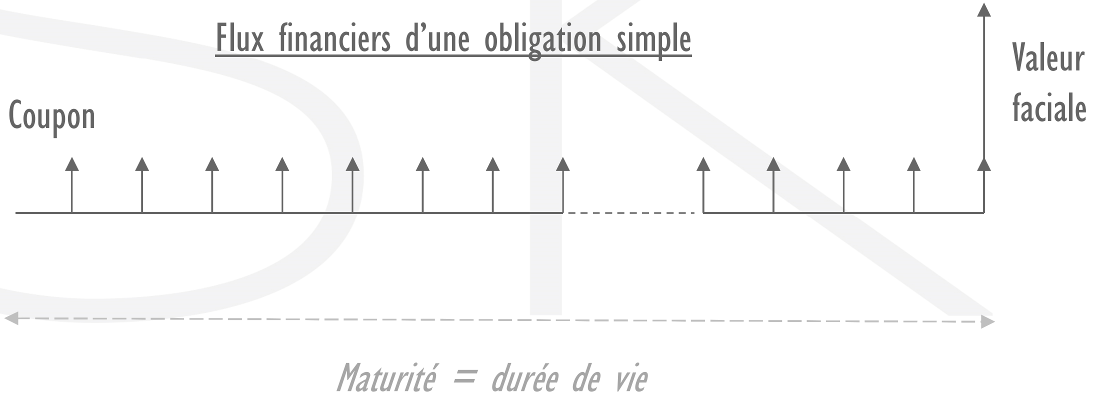
$$V_P = \frac{CF_1}{r-g}$$

APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS OBLIGATIONS

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

Caractéristiques :

- Titre de dette = engagement de la part de l'émetteur (emprunteur) de rembourser la valeur faciale (ou nominale) et d'effectuer des paiement périodiques d'intérêts (coupons)

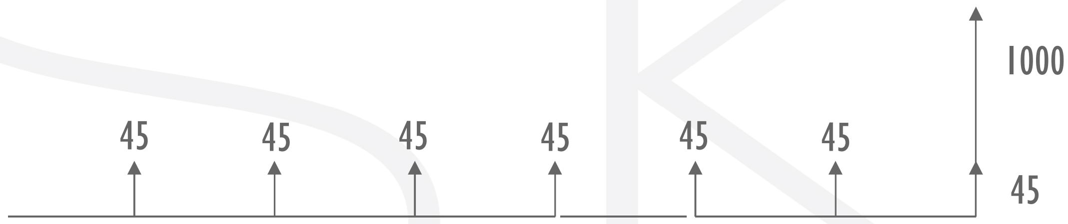


Coupon : intérêt versé périodiquement, le coupon est exprimé généralement en pourcentage de la valeur nominale (taux de coupon)

APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS
OBLIGATIONS

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

Exemple : obligation, maturité 7 ans, valeur nominale 1000 €, coupons versés annuellement, taux de coupon de 4.5%. Quels sont les flux financiers ?



Quelle est la valeur de ce titre ?

A quoi correspond r ?

$$V_P = 45\left[\frac{1-(1+r)^{-7}}{r}\right] + \frac{1000}{(1+r)^7}$$

APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS OBLIGATIONS

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

Formule générale :

$$V_P = C\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]+\frac{VN}{(1+r)^n}$$

Exemple : obligation, maturité 7 ans, valeur nominale 10000 €, coupons versés chaque semestre, taux de coupon de 4.5% (annuel), taux de rendement requis par le marché de 6% (proportionnel annuel). Quelle est la valeur de ce titre ?

*Coupon = 10000 * 0.045/2 = 225€*

$$V_P = 225\left[\frac{1-(1+0.03)^{-14}}{0.03}\right]+\frac{10000}{(1+0.03)^{14}} = 9152.7945$$

APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS
OBLIGATIONS

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

Formule générale :

$$V_P = C\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right] + \frac{VN}{(1+r)^n}$$

- Si r = taux de coupon, l'obligation est vendue à la valeur nominale
- Si r > taux de coupon, l'obligation est vendue à escompte
- Si r < taux de coupon, l'obligation est vendue à prime

- taux à la baisse → gain en capital, le prix de l'obligation augmente
- taux à la hausse → perte en capital, le prix de l'obligation baisse

- ! Les prix des obligations **augmentent plus rapidement qu'ils ne baissent**

APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS
EXERCICES

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

- Quel est le prix d'une obligation, maturité 8 ans, promettant un coupon de 4.5% semi-annuel et ayant une valeur nominale de 10000€ si le taux de rendement requis sur ce titre est de 5.5% annuel effectif ?

- Combien êtes-vous prêt à payer pour une obligation payant un coupon annuel de 52€ pendant 10 ans et ayant une valeur nominale de 1000€ ? Le rendement que vous exigez sur votre investissement est de 3.75%, taux proportionnel annuel capitalisé par semestre.

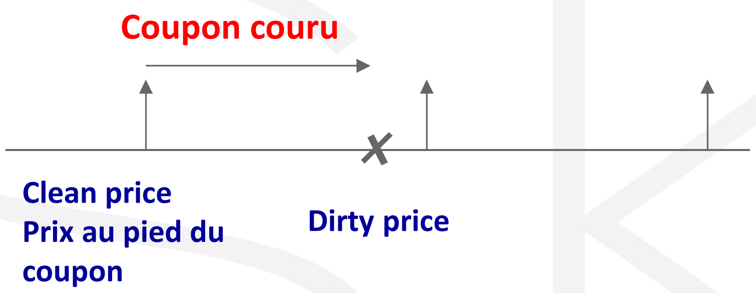
APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS
EXERCICES

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

- Vous achetez une obligation (note), maturité 6 ans, taux de coupons 4% (annuel), par valeur nominale 12000€, yield 3%. Supposons que le yield augmente à 4% immédiatement après l'achat. Si vous revendez l'instrument après 2 ans, quel rendement aurez-vous réalisé ?

APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS EXERCICES

Dirty price, clean price et coupon couru d'une obligation



$$w = \frac{\#\text{ jours entre date settlement et date du coupon précédent}}{\#\text{ de jours entre 2 coupons}}$$

$$\text{Prix} = \sum \frac{\text{Flux financiers espérés}}{(1+i)^{t+w}}$$

APPLICATION VALEUR DE TITRES FINANCIERS
EXERCICES

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

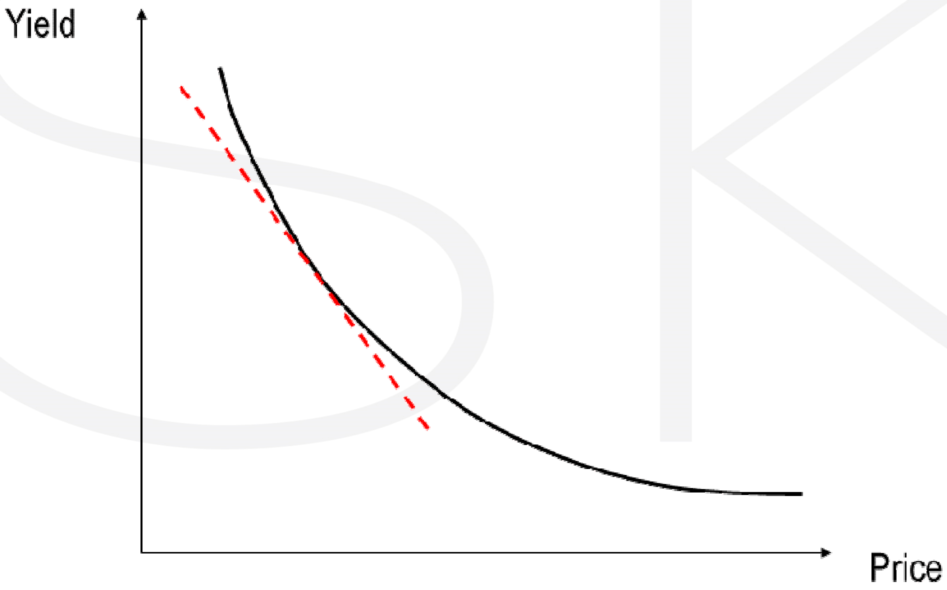
- Considérons une obligation, maturité 17 ans (émise le 1er décembre 2011 et échéant le 1er décembre 2031), taux de coupon 4,25% (taux nominal). Les coupons sont versés chaque trimestre : 1er mars, 1er juin, 1er septembre, 1er décembre. Aujourd'hui, 1er janvier 2015, le yield est de 3,98% (taux effectif).

  Quel est le clean price, quel est le dirty price sachant que l'on utilise une convention 30/360.

APPLICATION – RISQUE DES OBLIGATIONS
LA DURATION

Relation prix /yield pour une obligation à taux fixe

La variation de prix est déterminée par la variation du yield



APPLICATION - OBLIGATIONS

LES OBLIGATIONS OU TITRES A REVENU FIXE

- Risques liés à l'investissement en obligations
  - Variation du taux de rendement requis (risque de défaut, variation du niveau general des taux d'intérêts)
  - Impossibilité de réinvestir les coupons au yield

APPLICATION - OBLIGATIONS

Effets en capital et réinvestissement du coupon

Obligation, coupon 10%, échéance 8 ans

Revente du titre après t années									
Revente	0	1	2	3	4	5	6	7	8
F	100	100	100	100	100	100	100	100	100
r=									
0,06	1248	1223	1197	1168	1139	1107	1073	1038	1000
0,08	1115	1104	1092	1080	1066	1052	1036	1019	1000
0,10	1000	1122	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
0,12	901	909	918	928	939	952	966	982	1000
0,14	814	828	844	863	883	907	934	965	1000

APPLICATION - OBLIGATIONS

Effets en capital et réinvestissement du coupon

Obligation, coupon 10%, échéance 8 ans

Capitalisation des coupons									
F	100	100	100	100	100	100	100	100	100
0,06	0	100	206	318	437	564	698	839	990
0,08	0	100	208	325	451	587	734	892	1064
0,10	0	100	210	331	464	611	772	949	1144
0,12	0	100	212	337	478	635	812	1009	1230
0,14	0	100	210	344	492	661	854	1073	1323

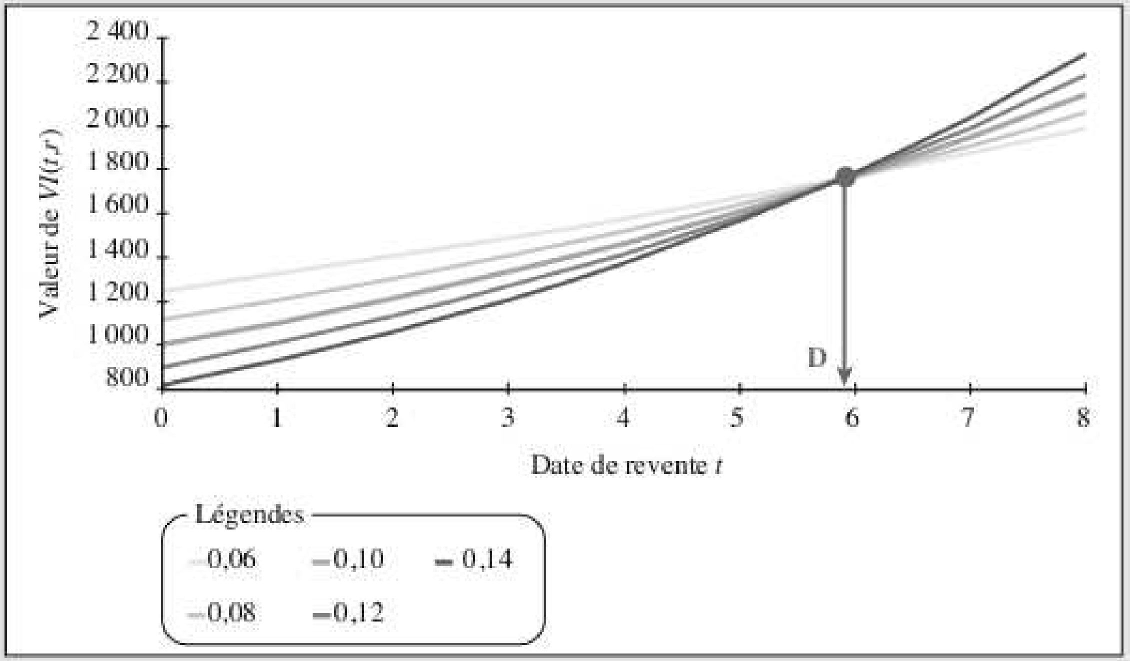
Valeur totale de l'investissement									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,06	1248	1323	1403	1487	1576	1671	1771	1877	1990
0,08	1115	1204	1300	1404	1517	1638	1769	1911	2064
0,10	1000	1222	1210	1331	1464	1611	1772	1949	2144
0,12	901	1009	1130	1265	1417	1587	1778	1991	2230
0,14	814	928	1054	1207	1376	1568	1788	2038	2323
variance	*172*	*163*	*137*	*111*	*79*	*41*	*8*	*64*	*132*

APPLICATION - OBLIGATIONS

Effets en capital et réinvestissement du coupon

Obligation, coupon 10%, échéance 8 ans

Figure 9.8 - Évolution de la valeur de l'investissement obligataire en fonction de la date de revente *t* et du taux *r*.



APPLICATION – RISQUE DES OBLIGATIONS
LA DURATION

Evaluation du risque d'une obligation:

- La **Duration** mesure la sensibilité du prix d'une obligation aux variations du yield.
- Duration est la dérivée première du prix par rapport au yield, c'est aussi une semi-elasticité
- Formule de la duration (ou durée)

$$\mathrm{DUR} = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t \times t}{(1+y)^t}}{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+y)^t}} = \frac{\displaystyle\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t \times t}{(1+y)^t}}{P}$$

APPLICATION – RISQUE DES OBLIGATIONS
LA DURATION

Evaluation du risque d'une obligation:

- La **Duration** mesure la sensibilité du prix d'une obligation aux variations du yield.
- Duration est la dérivée première du prix par rapport au yield, c'est aussi une semi-elasticité
- Formule de la duration (ou durée)

$$\mathrm{DUR} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t \times t}{(1+y)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t}{(1+y)^t}} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_t \times t}{(1+y)^t}}{P}$$

APPLICATION – RISQUE DES OBLIGATIONS
LA DURATION

Une obligation a une échéance de 2 ans, une valeur nominale de \$1,000, un taux de coupon de 9% et un yield de 10%. Quelle est sa duration et sa duration modifiée ?

$$\text{DUR} = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t(t)}{(1+k)^t}}{\sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+k)^t}} = \frac{\frac{\$90}{(1.10)^1} + \frac{\$1{,}090(2)}{(1.10)^2}}{\frac{\$90}{(1.10)^1} + \frac{\$1{,}090}{(1.10)^2}}$$

$$= 1.92 \text{ years}$$

$$ModDuration = \frac{duration}{1+y} = \frac{1.92}{1.10} = 1.745$$

Modified duration = $\frac{dP}{dy}\frac{1}{P}$

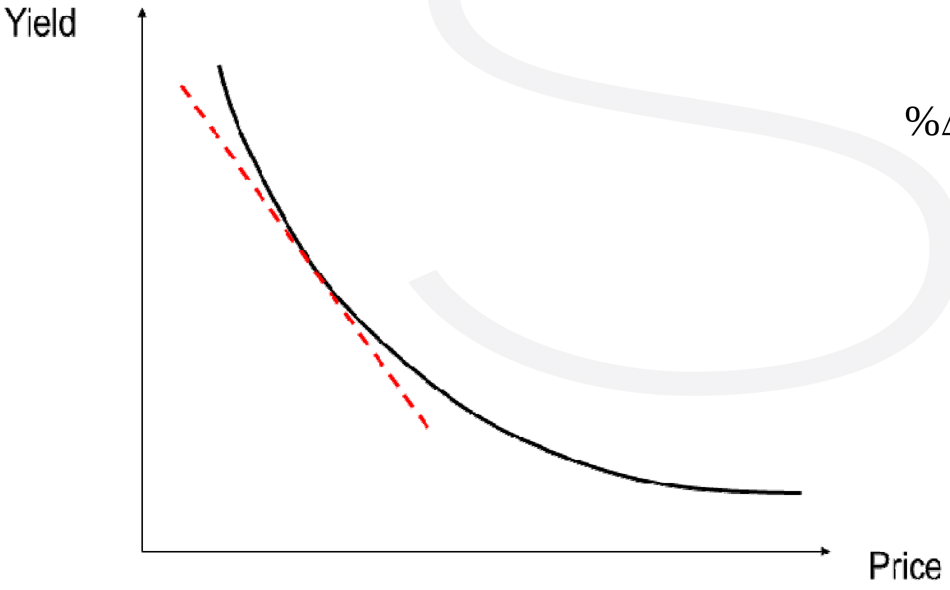
$$\boxed{\%\Delta P = \text{-}\ ModDUR \times \Delta y}$$

APPLICATION – RISQUE DES OBLIGATIONS

LA DURATION

Supposons que le yield d'une obligation augmente de 0,3%, quelle sera la variation du prix du titre ?

$$\boxed{\Delta P / P = -\, ModDUR \times \Delta y}$$



$$\%\Delta P = -\mathrm{ModDUR} \times \Delta y = -1.75 \times 0.003$$
$$= -.53\%$$

APPLICATION – RISQUE DES OBLIGATIONS
LA CONVEXITE

Le résultat obtenu en utilisant la duration modifiée est corrigée par la convexité.

$$\frac{dP}{P} = -ModDuration \times (\Delta y) + \frac{1}{2} Convexité \times (\Delta y)^2$$

<u>Example</u>

9% coupon, échéance 20 ans, P=134.6722, yield = 6%

Quelle est la duration? Si la convexité est de 81,96, quelle serait la variation du prix du titre suite à une augmentation des taux de 100pb ?

APPLICATION – RISQUE DES OBLIGATIONS

Volatilité des prix :

-Plus le taux de coupon est petit, plus la volatilité des prix de l'obligation est élevée

-Plus l'échéance est longue, plus la volatilité des prix de l'obligation est élevée (cependant la duration augmente à un taux décroissant)

-Il y a une relation inverse entre le YTM et la duration: un yield plus élevé réduit la duration car il diminue l'impact des cash flows les plus éloignés.